1201 Riemann面ノ型ニツイテ II

吉田德之助（海軍機關學校）

（12月28日受付）

w－平面上ノ有限個ノ點ノ上デ對數的ニノミ分岐スル Riemann 面ニツイテ考ヘマス。

底點ガ三個デアリ位相樹木ガ函数 $w=e^{e^z}$ ニ對應スル Riemann 面ノ位相樹木ト同型デアル Riemann面ノ型ニ關スル小林先生ノ問題ニツイテ述ベテミタイト思ヒマス。

三個ノ底点ヲ $w_1=0$，$w_2=1$，$w_3=\infty$ トスル。Riemann 面 W ヲ実軸ニ沿ツテ切斷スルトキ無限個ノ單葉ナル上半平面 E_0 及ビ下半平面 E_u ニ切リ離サレル。位相樹木ハコレ等ノ接続ヲ示ス。位相樹木ノ Kern ニアリ logarithmische Ende ノ始点デアル節点ヲ $\cdots, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \cdots$ ニテ表ハシ V_k ヲ始点トスル logarithmische Ende ヲ L_k ニテ表ハス。V_k ト V_{k+1} トノ間ニハ偶数個ノ節点ガ存在スル。コレヲ S_k ニテ表ハシソノ個数ヲ $2(n_k-1)$ トスル。

V_k ハ k ガ偶数デアルトキ E_0 ヲ奇数デアルトキ E_u ヲ表ハス。コノ E_0 又ハ E_u ヲ E_k ト名付ケル。E_kニハ負軸正軸ノ順デ L_k ニテ表ハサレテヰル半葉ガ w_1 ヲ中心トシテ渦狀ニ無限ニ接続シテヰル。k ガ偶数ナラバ正ノ方向ニ奇数ナラバ負ノ方向ニ廻ツテヰルノデアル。E_k ヨリ始マルコノ渦狀

面分ヲF_kトスル。S_kニテ表ハサレル$2(n_k-1)$枚ノ半葉ガw_2ヲ中心トシテ渦状ニ接続シテナス面分ヲG_kトスル。F_kトF_{k+1}トハG_kヲ経テ接続シテヰル。F_kヲ単位円$|w|=1$ニテ二分シ単位円内ノ上ニアル部分ヲF'_k単位円外ノ上ニアル部分ヲF''_kニテ表ハス。kガ偶数デアルトキ$F''_k+G_k+F''_{k+1}$ヲ奇数デアルトキ$F'_k+G_k+F'_{k+1}$ヲW_kデ表ハス。W_kハRiemann面Wノ連結セル面分デアリ$W=\sum W_k$トナル。

W_kヲ全x-平面ヨリ二ツノ半範囲$R(x)<0,\ I(x)>(n_k-\frac{1}{2})\pi$及ビ$R(x)<0,\ I(x)<-(n_k-\frac{1}{2})\pi$ヲ除イタ範囲$D_k$ニ次ノ如クニシテ寫像スル。先ヅ$F''_k-E_k$及ビ$F''_{k+1}-E_{k+1}$或ハ$F'_k-E_k$及ビ$F'_{k+1}-E_k$ヲ函数$x=(-1)^k\log w$ニテ範囲$R(x)>0,\ I(x)>n_k\pi$及ビ$R(x)>0,\ I(x)<-n_k\pi$ヘ寫像スル。$G_k$ヲ函数$x=(-1)^k\log(w-1)$ニテ範囲$(n_k-1)\pi>I(x)>-(n_k-1)\pi$ヘ寫像スル。$E_k\cdot F''_k$ハコレヲ直線$R(w)=\frac{1}{2}$ニテ二分シ$R(w)<\frac{1}{2}$ナル側ノ部分ヲ函数

$$R(x)=\log|w|,\quad I(x)=n_k\pi-\frac{\pi-\arg w}{\pi-\sec^{-1}2|w|}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ニテ範囲$R(x)>0,\ n_k\pi>I(x)>(n_k-\frac{1}{2})\pi$ニ寫像シ$R(w)>\frac{1}{2}$ナル側ノ部分ヲ函数

$$R(x)=\log|w-1|$$

$$I(x)=(n_k-1)\pi+\frac{\arg(w-1)}{\sec^{-1}2|w-1|}\cdot\frac{\pi}{2}\qquad |w-1|>1\text{ ナルトキ}$$

$$=(n_k-1)\pi+\frac{\arg(w-1)}{2\cos^{-1}\frac{|w-1|}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\qquad |w-1|<1\text{ ナルトキ}$$

ニテ範囲 $(n_k-\frac{1}{2})\pi > I(x) > (n_k-1)\pi$ ニ寫像スル。$E_k \cdot F'_k$ ノ場合ハ $\frac{1}{w}$ デ変換シタ上デ同様ノ寫像ヲ行フ。$E_{k+1}\cdot F''_{k+1}$ 或ハ $E_{k+1}\cdot F'_{k+1}$ ニ対シテモ同様ニシテコレヲ D_k ノ残リノ範囲ヘ寫像スル。然ルトキハ W_k ハ D_k ニ quasikonform ニ寫像サレシカモ接ギ目ノ上ヲ除イテ $\max\left|\frac{dw}{dx}\right| \Big/ \min\left|\frac{dw}{dx}\right| \leqq \frac{3}{2}$ ガ成立スル。

$m_0=0,\ m_k=\sqrt{n_0}+\sqrt{n_1}+\cdots+\sqrt{n_{k-1}},\ m_{-k}=-(\sqrt{n_{-1}}+\sqrt{n_{-2}}+\cdots+\sqrt{n_{-k}})$ トスル。D_k ヲ次ノ如クニシテ Z- 平面上ノ範囲 $2m_k\pi < I(Z) < 2m_{k+1}\pi$ ヘ寫像スル。

$\mathfrak{R}(x)<0$ デハ $x=u+iv,\ Z=X+iy$ トシテ

$$X-|y-2m_k\pi-\sqrt{n_k}\pi|=u-\sqrt{n_k}\pi,\ y-2m_k\pi-\sqrt{n_k}\pi=\frac{\sqrt{n_k}}{n_k-\frac{1}{2}}v$$

$\mathfrak{R}(x)>0,\ |x|<(n_k-\frac{1}{2})\pi$ デハ $x=\rho e^{i\varphi},\ Z=(2m_k+\sqrt{n_k})\pi i -\sqrt{n_k}\pi+re^{i\theta}$ トシテ

$$\rho=\frac{n_k-\frac{1}{2}}{\sqrt{n_k}}r\cos\theta,\quad \pi\tan\theta=2\varphi$$

$\mathfrak{R}(x)>0,\ |x|>(n_k-\frac{1}{2})\pi$ デハ $x=\rho e^{i\varphi},\ Z=X+iy$ トシテ

$$X=\log\frac{2(\rho-(n_k-1)\pi)}{\pi},\quad y=\sqrt{n_k}\varphi+(2m_k+\sqrt{n_k})\pi.$$

然ルトキハ D_k ハ Z- 平面上ノ範囲 $2m_k\pi<I(Z)<2m_{k+1}\pi$ ヘ quasikonform ニ寫像サレ、シカモ接ギ目ノ上ヲ除イテ $\max\left|\frac{dx}{dZ}\right| \Big/ \min\left|\frac{dx}{dZ}\right| \leqq 5\sqrt{n_k}$ ガ成立スル。

スベテノ W_k ヲコノ方法ニテ Z- 平面上ノ範囲 $2m_k\pi<I(Z)<2m_{k+1}\pi$ ヘ寫像スルトキ Riemann 面 W ハ平面 $Z \neq \infty$ ヘ quasikonform ニ寫像サレル。ソシテ寫像函数 $W=w(Z)$

ニ対シテハ接ギ目ノ上ヲ除イテ $\mathrm{Max}\left|\frac{dw}{dz}\right| \Big/ \mathrm{Min}\left|\frac{dw}{dz}\right| \leqq 8\sqrt{n_k}$

ガ成立スル。$\psi(k) = \mathrm{Max}(n_k, n_{k-1}, \cdots, n_0, n_{-1}, n_{-2}, \cdots n_{-k})$ トシテ Teichmüller ノ定理ヲ用ヒレバ

級数 $\sum \frac{1}{n\sqrt{\psi(n)}}$ ガ発散スレバ Riemann 面Wハ抛物的デアル

トイフ結論ヲ得ル。